Unidad 4: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

La calculadora científica en trigonometría

Las calculadoras científicas nos dan directamente el valor de seno, del coseno o de la tangente de cualquier ángulo. También nos dicen cuál es el ángulo del que conocemos el valor de una de sus razones trigonométricas.

Recordemos, paso a paso, cómo se recurre a la calculadora para trabajar en trigonometría.

Selección del modo DEG (grados sexagesimales)

Las calculadoras manejan tres unidades de medida de ángulos:

- Grados sexagesimales (DEG). Son los que utilizamos normalmente.
- Grados centesimales (GRA). Un ángulo recto tiene 100 grados centesimales. Nunca usaremos esta unidad de medida.
- Radianes (RAD). Esta unidad de medida de ángulos está relacionada con el estudio funcional de las razones trigonométricas (funciones trigonométricas). A partir de la próxima unidad se usará con frecuencia.

Ahora utilizaremos, exclusivamente, los grados sexagesimales. Por tanto, selecciona en la calculadora el modo DEG, a partir de la tecla [MODE] o [SETUP], según el modelo de calculadora.

Anotar un ángulo. Tecla [° ' "]

Para escribir el ángulo 38° 25' 36", se procede así:

38 [° ' "] 25 [° ' "] 36 [° ' "] [38.42666667]   [SHIFT] [° ' "] [38°25°36]

Se anota el ángulo en forma decimal.   Se expresa el ángulo en forma sexagesimal.

En las CALCULADORAS DE PANTALLA DESCRIPTIVA, se procede del mismo modo:

38 [° ' "] 25 [° ' "] 36 [° ' "] [=]   38°25°36°   38°25'36"

Cálculo de una razón trigonométrica. Teclas sin cos tan

Para calcular *sen* (47° 25'), se procede así:

sin 47 °'" 25 °'" [47.41666667] = [0.736293951 21]

Es decir, *sen* 47° 25' = 0,736

Análogamente, se procede con coseno, cos, y tangente, tan.

¡Atención! En algunas calculadoras antiguas, las teclas de las razones trigonométricas y sus inversas se pulsan después del número correspondiente.

Por ejemplo, para hallar *sen* 47° se pulsa:

47 sin

Funciones inversas: $\sin^{-1}$ (SHIFT sin), $\cos^{-1}$ (SHIFT cos), $\tan^{-1}$ (SHIFT tan)

¿Cuál es el ángulo cuyo seno vale 0,5? Sabemos que es 30°. La forma de preguntárselo a la calculadora es así:

SHIFT sin 0,5 = [30]

Análogamente:

cos α = 0,56 → ¿α? → SHIFT cos 0,56 = SHIFT °'" [55°56°39.13]

tg α = 3 → ¿α? → SHIFT tan 3 = SHIFT °'" [71°33°54.18]

<u>Ejercicio 4 – 1 .-(UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA)</u>

Utiliza la calculadora para realizar estas operaciones:

$$\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{sen}(\mathbf{45º}) - \mathbf{cos}(\mathbf{60º})\,;\ \ \boldsymbol{ii})\ \ \mathbf{tan}(\mathbf{20º}) + \boldsymbol{sen}(\mathbf{215º})\ \ ;$$

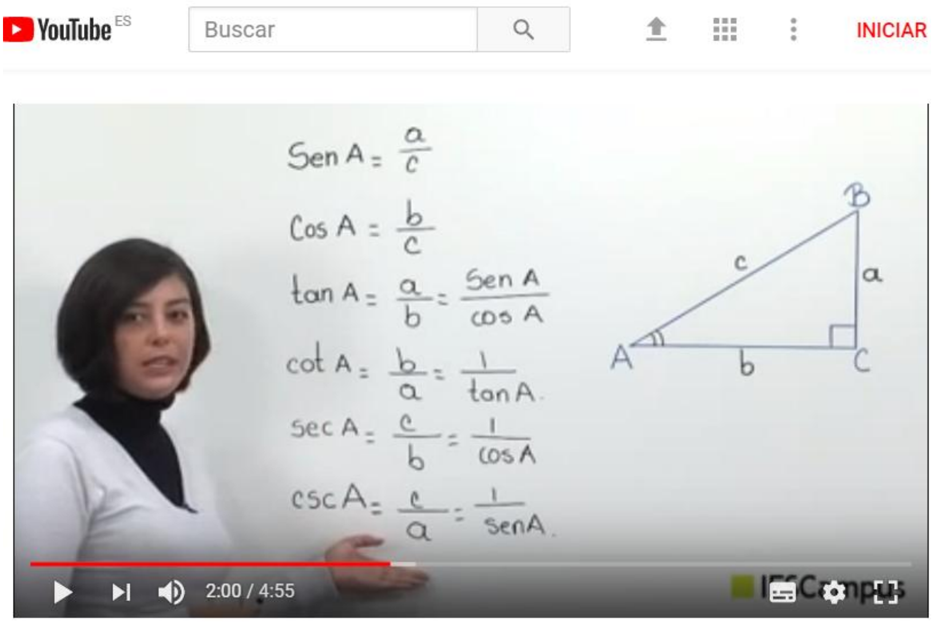
$$\boldsymbol{iii})\ \ \boldsymbol{sen}(\mathbf{25º30º45º})\ \ ;\ \boldsymbol{iv})\ \mathbf{cos}(\ \mathbf{245º10º05º})$$

<u>Relaciones entre las razones trigonométricas</u>

Cada ángulo agudo posee tres razones trigonométricas, más otras tres razones inversas. Se definen a partir de un triángulo rectángulo en el que aparezca dicho ángulo. Por el teorema de Tales sabemos que no dependen del tamaño del triángulo, pues todos los triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son triángulos semejantes, y por lo tanto proporcionales.

(En tu libro de texto encontrarás la definición de las razones trigonométricas así como varias fórmulas de las relaciones entre ellas.)

Aquí tienes un video de ayuda con las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Video 4 – 1 : https://www.youtube.com/watch?v=_h7du09opKg



TRIGONOMETRIA: Razones trigonométricas de ángulo agudo

Recuerda <u>las razones trigonométricas</u>

En un triángulo rectángulo, al lado de mayor longitud se le denomina hipotenusa, y a los otros dos lados, catetos. A partir de un ángulo se denominan cateto opuesto o cateto contiguo, según como estén situados, en frente del ángulo o formando parte del mismo.

Seno de un ángulo es el cociente, o razón, entre el cateto opuesto del ángulo y la hipotenusa.

Coseno de un ángulo es el cociente, o razón, entre el cateto contiguo y la hipotenusa.

Tangente de un ángulo es el cociente, o razón, entre el cateto opuesto y el cateto contiguo. O lo que es lo mismo, la tangente es el cociente entre el seno y el coseno.

$$\tan \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$$

El teorema de Pitágoras relaciona los tres lados de un triángulo rectángulo. Así a partir de dos de ellos se puede calcular el otro mediante una raíz cuadrada. Si llamamos a y b a los catetos y c a la hipotenusa se obtienen las siguientes fórmulas.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\ ;\ a = \sqrt{c^2 - b^2}\ ;\ b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Ejercicio 4 – 2.-(RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS)

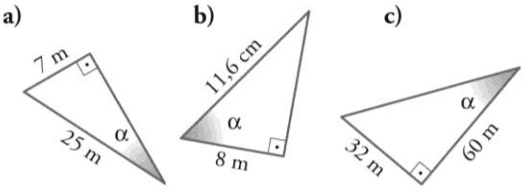
i) Visualiza el video y resuelve en tu cuaderno el mismo ejercicio que aparece en él. Video 4 – 1 – a :
https://www.youtube.com/watch?v=mvSipYTqHOY

ii) En el triángulo del video anterior, calcula la longitud de la hipotenusa.

Ejercicio 4 – 3.(TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS)

A continuación tienes un ejercicio resuelto para que lo estudies con atención y lo resuelvas en tu cuaderno como uno de los ejercicios que debes entregar como parte del examen de evaluación.

Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:



a) $sen\ \alpha = \frac{7}{25} = 0,28$; $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{25} = \frac{24}{25} = 0,96$; $tg\ \alpha = \frac{7}{24} \approx 0,29$

b) $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{11,6^2 - 8^2}}{11,6} = \frac{8,4}{11,6} \approx 0,724$

$cos\ \alpha = \frac{8}{11,6} \approx 0,69$; $tg\ \alpha = \frac{8,4}{8} = 1,05$

c) $sen\ \alpha = \frac{32}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{32}{68} = \frac{8}{17} \approx 0,47$

$cos\ \alpha = \frac{60}{68} = \frac{15}{17} \approx 0,88$; $tg\ \alpha = \frac{32}{60} = \frac{8}{15} \approx 0,53$

Ahora es tu turno, tú solo, trata de resolver el siguiente ejercicio que tiene dos apartados.

Ejercicio 4 – 4.-(TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS)

a) En un triángulo rectángulo un ángulo agudo mide 37º, y el cateto opuesto 87 cm. Halla el otro cateto y la hipotenusa.

b) Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Calcula, en grados y minutos, los dos ángulos agudos. (Tendrás que utilizar la función arco de las razones trigonométricas, en tu calculadora debes utilizar la tecla SHIFT, en este ejercicio lo más probable es que utilices la función arco tan)

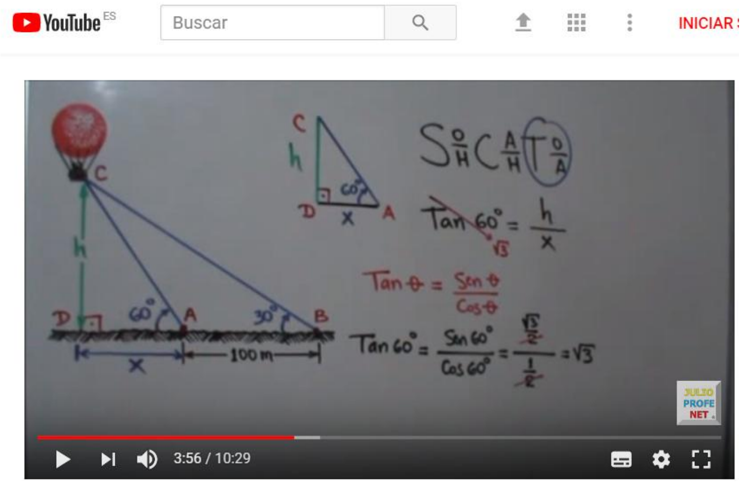
Nota importante: las funciones arco

Las funciones arco nos permiten averiguar ángulos y resolver ecuaciones trigonométricas. Ejemplo: Halla el ángulo en grados cuyo seno vale 0,5.

Se plantea así $sen\ x = 0{,}5$ y se resuelve tecleando: SHIFT sin 0,5 = y se obtiene 30 grados.

En este video te explican cómo calcular la altura a la que vuela un globo aerostático utilizando triángulos rectángulos.

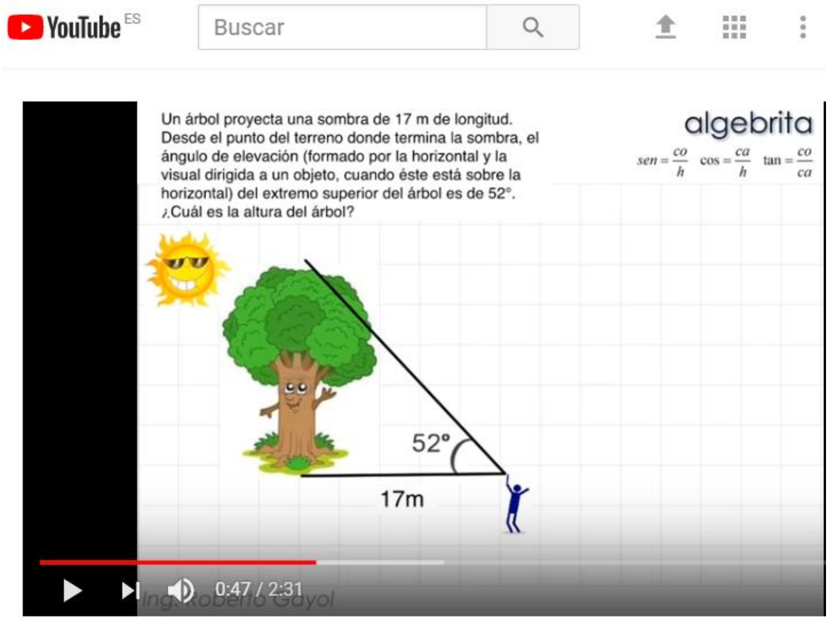
Video 4 – 1 – d: https://www.youtube.com/watch?v=HKPBF6AwlL4



Si el problema anterior te ha parecido complicado, ahora verás que hay ejercicios mucho más sencillos.

En este video se calcula la altura de un árbol según la sombra proyectada.

Video 4 – 1 – e: **https://www.youtube.com/watch?v=sp0YaUG7Gi4**



Ejercicio 4 – 5.-(TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS)

Para finalizar este apartado te propongo una tarea de investigación. Localiza en tu libro de texto o apuntes **tres problemas con enunciado** diferentes a los dos anteriores (que se resuelva con triángulos rectángulos) y resuélvelos en tu cuaderno.

La calculadora científica nos puede ayudar en esta cuestión: “CALCULAR UNA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA CONOCIENDO OTRA”.

CÁLCULO DE UNA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA CONOCIENDO OTRA

Sabemos que $\cos \alpha = 0{,}63$. *¿Cuánto vale* $tg\ \alpha$*?*

Para resolver este problema, podemos recurrir a las igualdades fundamentales, pero también podemos hacerlo directamente con las teclas trigonométricas de la calculadora:

SHIFT cos 0,63 = 50.9498774 tan = 1.23269068

Ángulo cuyo coseno es 0,63 — Su tangente es

Con las CALCULADORAS DE PANTALLA DESCRIPTIVA podemos proceder análogamente:

SHIFT cos 0,63 = $\cos^{-1}$(0.63 50.9498774 tan Ans = TAN(Ans 1.23269068

Pero también se puede hacer directamente:

tan SHIFT cos 0,63 = TAN($\cos^{-1}$(0.63 1.23269068

La tangente del ángulo cuyo coseno es 0,63 vale 1,23269…

Observa este otro ejemplo:

Sabemos que tg α = 2. ¿Cuánto vale cos α?

SHIFT tan 2 = 63.4349488229 cos = 0.4472135955 → *cos* α = 0,447

El ángulo cuya tangente es 2. — El coseno de ese ángulo.

Con PANTALLA DESCRIPTIVA: cos SHIFT tan 2 =

COS(TAN⁻¹(2
.4472135955

<u>Dada una razón trigonométrica, calcular las otras.</u>

Las tres razones trigonométricas están relacionadas por multitud de fórmulas. Las más importantes son estas dos: $\tan \propto = \frac{sen \propto}{\cos\propto}$; $(sen\ \propto)^2 + (\cos \propto)^2 = 1$

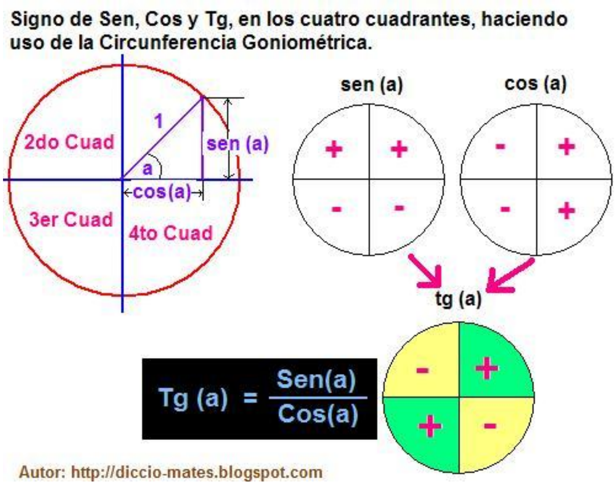
Utilizando estas fórmulas, a partir de una razón trigonométrica podemos calcular las otras dos. En tu libro encontrarás ejercicios resueltos a este respecto. Pero ahora mismo que disponemos de calculadora científica podemos realizar esto de otra manera.

<u>Ejercicio 4 – 6.-(CÁLCULO DE UNA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA A PARTIR DE OTRA)</u>

A es un ángulo agudo:

i) Sabemos que cos A = 0.63, calcula tan A
ii) Sabemos que tan A = 2, calcula el cos A
iii) Sabemos que sen A = 0.5, calcula el valor de cos A

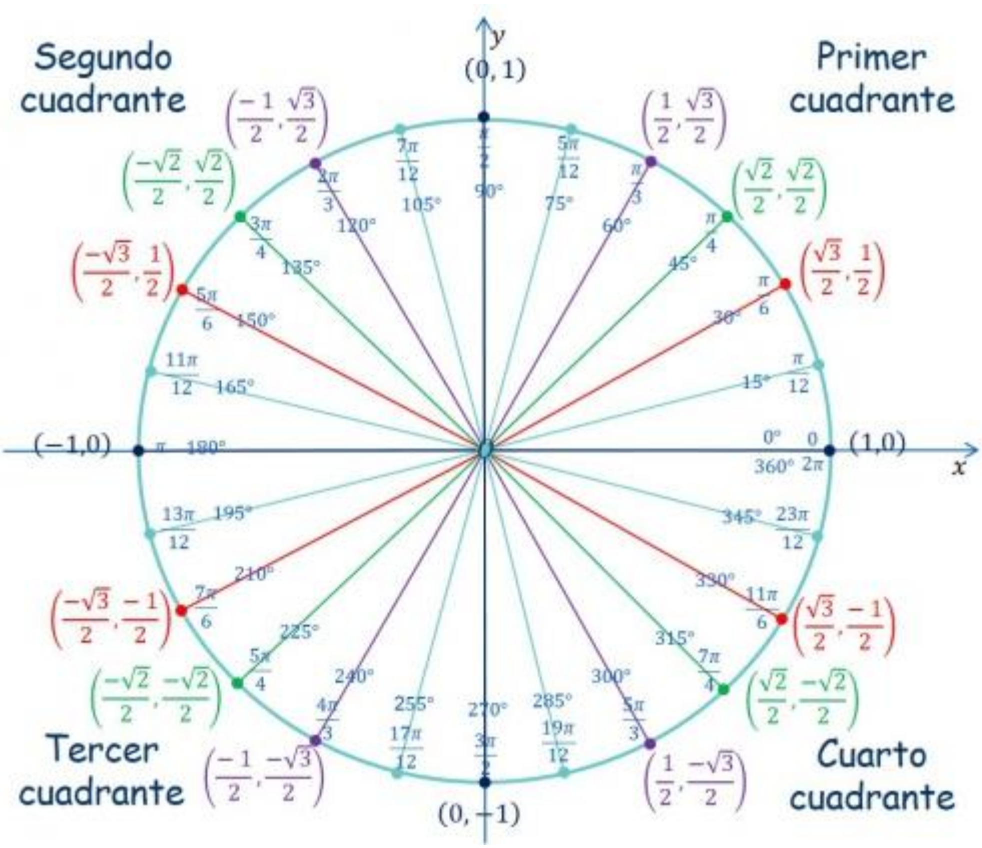
En tu libro de texto puedes estudiar cómo se definen las razones trigonométricas para ángulos que no son agudos, es decir, que miden más de noventa grados. Busca en él y encuentra el círculo goniométrico. (Ah, que no sabes lo que es, pues pregunta al amigo google)



Atención <u>Círculo goniométrico</u>

El círculo se parte en cuatro cuadrantes, y se representa el ángulo cero en la varilla que correspondería a las tres de la tarde. Para representar un ángulo se gira en sentido contrario a las agujas del reloj. MUY IMPORTANTE: EL RADIO DEL CIRCULO ES 1.

Has de captar la siguiente idea: un ángulo agudo se representa en el primer cuadrante, un ángulo llano en el segundo, y un ángulo convexo en el tercero o el cuarto. Las razones trigonométricas de un ángulo no agudo se corresponden con las razones de otro ángulo agudo situado en el primer cuadrante.



Los valores en pares ordenados son (seno, coseno)

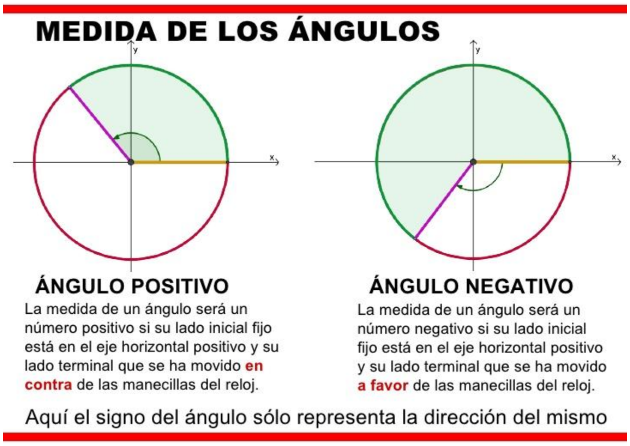
Un ángulo A situado en el segundo cuadrante se corresponde con el ángulo 180º - A situado en el primero, y los valores de seno son iguales y los de coseno y tangente opuestos. Ejemplo: 135º se corresponde con (180 – 135 = 45) el ángulo de 45º y sus razones son: sen 135 = sen 45 ; cos 135 = - cos 45 ; tan 135 = - tan 45

(Puedes comprobar estas igualdades mirando los valores en la imagen superior)

Un ángulo B situado en el tercer cuadrante se corresponde con el ángulo B -180º situado en el primero, y los valores de tangente son iguales y los de seno y coseno opuestos. Ejemplo: 195º se corresponde con (195-180 = 15) el ángulo de 15º y sus razones son: sen 195 = - sen 15 ; cos 195 = - cos 15 ; tan 135 = tan 15

Un ángulo C situado en el segundo cuadrante se corresponde con el ángulo 360º- C situado en el primero, y los valores de coseno son iguales y los de seno y tangente opuestos. Ejemplo: 335º se corresponde con (360 - 335 = 25) el ángulo de 25º y sus razones son: sen 335 = - sen 25 ; cos 335 = cos 25 ; tan 335 = - tan 25

Es interesante la idea de ángulo negativo, y cómo se representa en el círculo haciendo girar en el sentido de las agujas del reloj.



Atención <u>un ángulo negativo</u>

Un ángulo negativo equivale a un ángulo positivo, y para averiguar cuál es se le suma 360º las veces que sea necesario. Ejemplo: -1000º equivale a -1000+ 360 = - 640 que a su vez equivale a - 640 + 360= - 280, que a su vez equivale a – 280 +360 = 80º que es un ángulo agudo situado en el primer cuadrante.

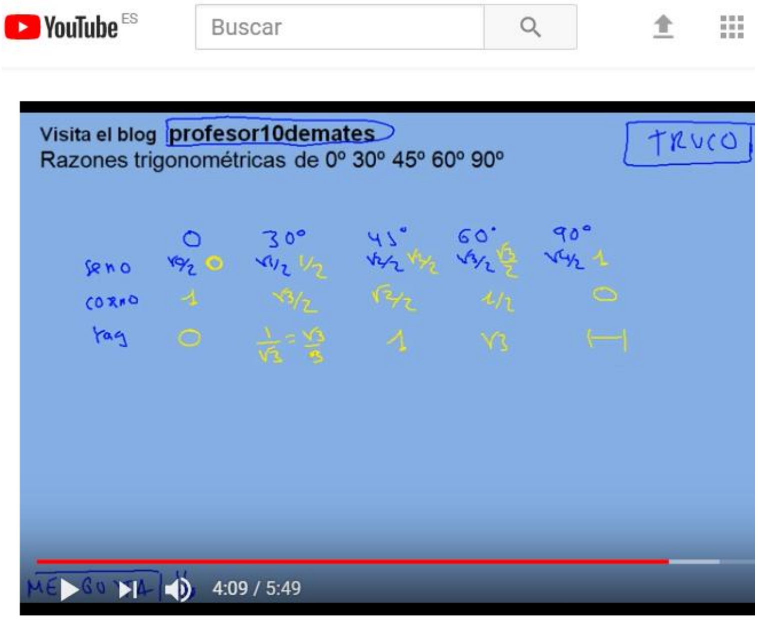
Después de esta introducción te recomiendo un video para que visualices todo esto.
Video 4 – 4 – 0 : **https://www.youtube.com/watch?v=3Nh-Jynv46E**

Trigonometria - Reduccion al primer cuadrante SECUNDARIA (4ºESO)

Ejercicio 4 – 7.-(RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS HABITUALES)

En el siguiente video te explican un truco para recordar las razones trigonométricas de unos ángulos muy habituales. Échale un vistazo y escribe en tu cuaderno una tabla con las razones trigonométricas de los ángulos 0º 30º 45º 60º 90º que debes aprender de memoria.

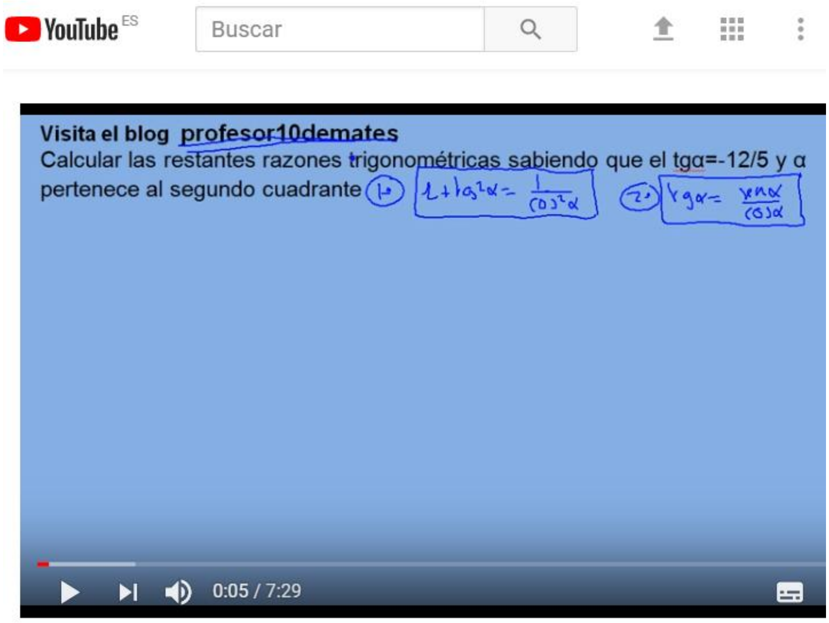
Video 4 – 4 – a : **https://www.youtube.com/watch?v=hnQu3wOj5BU**



TRUCO Razones trigonométricas de 0º 30º 45º 60º 90º

En este otro video se calculan las demás razones trigonométricas de un ángulo que pertenece al segundo cuadrante y del que sabemos que su tangente vale -12/5.

Video 4 – 4 – b : https://www.youtube.com/watch?v=D_CcZCc3GXI



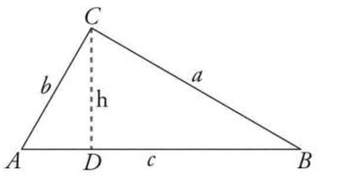
Si un triángulo no tiene un ángulo recto, las fórmulas anteriores no son válidas y necesitamos otras fórmulas nuevas que relacionen las razones trigonométricas de sus ángulos con la medida de sus lados. Las más importantes son:

i) Teorema de los senos
ii) Teorema del coseno

Teorema de los senos

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$



El teorema de los senos da lugar a tres igualdades:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \qquad \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \qquad \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Cada una de ellas relaciona dos lados con los ángulos opuestos. Por tanto, con ellas se puede resolver un triángulo en el cual los datos y las incógnitas sean dos lados y sus ángulos opuestos. (Recordemos que conocer dos ángulos es equivalente a conocer los tres).

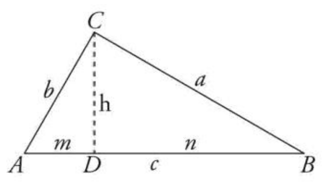
TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER	
DATOS	**INCÓGNITA**
Dos ángulos y un lado	Otro lado
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	Otro ángulo

Teorema del coseno

El teorema de Pitágoras se generaliza para triángulos cualesquiera mediante las siguientes igualdades:

En un triángulo cualquiera se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$



Un consejo por si quieres aprovecharlo: Localiza en tu libro de texto ejemplos de cómo se utilizan estas fórmulas para resolver triángulos. Estúdialos con atención.

NOTA IMPORTANTE
Resolver un triángulo quiere decir calcular los lados y ángulos no conocidos.

Ejercicio 4 – 8.-(RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA)

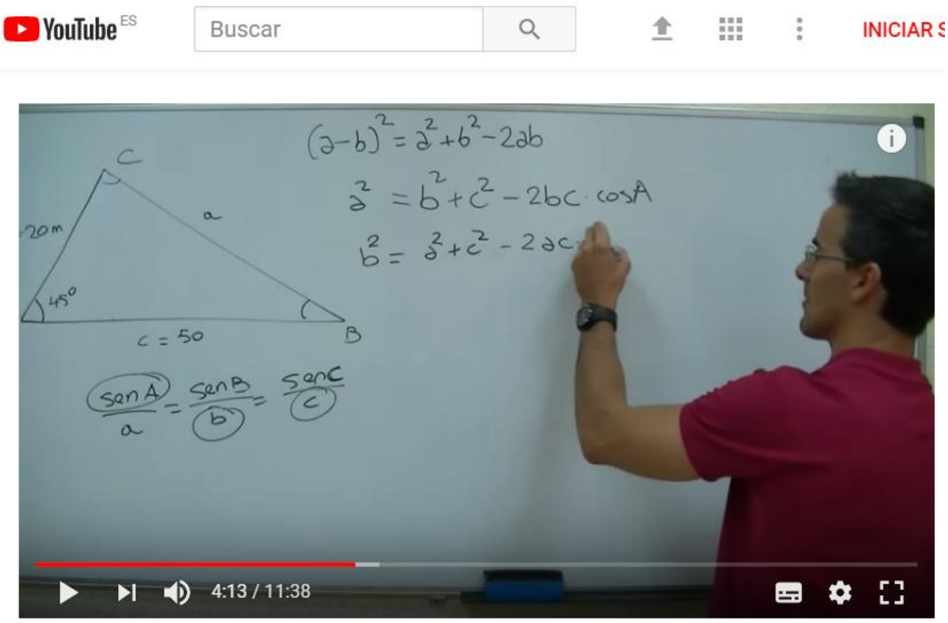
Resuelve en tu cuaderno el ejercicio que aparece resuelto en este video donde se utiliza el teorema de los senos.

Video 4 – 5 – a : https://www.youtube.com/watch?v=r2DZSxFLRK0

Ejercicio 4 – 9.-(RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA)

Resuelve en tu cuaderno el ejercicio que aparece resuelto en este video donde se utiliza el teorema del coseno.

Video 4 – 5 – b : **https://www.youtube.com/watch?v=CYHWl_7dIdw**



Ejercicio 4 – 10.-(RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA)

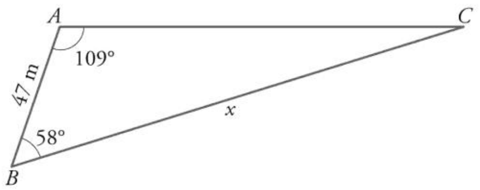
Resuelve el siguiente ejercicio utilizando el teorema del coseno.

Conocemos $a = 132$ *m*, $b = 213$ *m*, $c = 156$ *m*. *Calcular el ángulo* $\hat{B}$.

Ejercicio 4 – 11.-(RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA)

Resuelve el siguiente ejercicio utilizando el teorema de los senos.

La distancia de A *a* B *es 47 m. Conocemos los ángulos* $\hat{A} = 109°$, $\hat{B} = 58°$. *¿Cuál es la distancia de* B *a* C?



2.3. A partir de un enunciado, dibuja el triángulo que describe la situación y lo resuelve.

Ejercicio 4 – 12.-(RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CON TRIÁNGULOS)

Resuelve el siguiente ejercicio dibujando el triángulo que describe la situación.

■□□ **Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?**

Ejercicio 4 – 13.- (RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CON TRIÁNGULOS)

Resuelve el siguiente ejercicio dibujando el triángulo que describe la situación.

Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?

Ejercicio 4 – 14.- (RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CON TRIÁNGULOS)

Resuelve el siguiente ejercicio dibujando el triángulo que describe la situación.

Para medir la anchura de un río se mide el ángulo bajo el que se ve un árbol en la otra orilla, con el resultado de 58º. Al separarnos 24 m de la orilla en dirección perpendicular a ella, el nuevo ángulo bajo el que vemos el árbol es de 36º. Calcula: **a)** la anchura del río; **b)** la altura del árbol.

Ejercicio 4 – 15.-(DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS)

Localiza en tu libro de texto o en tus apuntes dos ejercicios de trigonometría con las siguientes características.

En el primero, lo podemos plantear pero al intentar resolverlo no hay solución.

En el segundo, lo planteamos y tratamos de resolverlo con el teorema de los senos y obtenemos dos soluciones distintas, es decir, dos triángulos que cumplen las condiciones del enunciado.